MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. D. Rost

SoSe 2015
Blatt 10
19.06.2015

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II (Unterrichtsfach)“

1. Gegeben sei die symmetrische Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

   a) Man bestimme das charakteristische Polynom sowie die Eigenwerte von A.

   b) Man bestimme für jeden Eigenraum von A jeweils eine Orthonormalbasis.

   c) Man gebe eine orthogonale Matrix $P \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit $P^\top AP = D$ an.

2. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 1999).* Gegeben sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

   a) Man betrachte die Matrix $A - E$ und bestimme alle Eigenwerte und Eigenräume von A.
   Hinweis:
   Der Aufgabensteller will Ihnen hier offenbar einen Tipp geben. An Hand von der Matrix $A - E$ kann ein Eigenwert der Matrix A sofort bestimmt werden.

   b) Man bestimme eine orthogonale Matrix P, so daß $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist.
   Hinweis: Für orthogonale Matrizen gilt $P^T = P^{-1}$. Diese Teilaufgabe ist also wie in Aufgabe 1c) zu lösen.

   c) Man bestimme eine Matrix B mit $B^2 = A$.
   Hinweis:
   Verwenden Sie Satz 10.10.

3. *Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2009*

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A und eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren für A.

b) Bestimmen Sie eine orthogonale 2×2–Matrix T und eine Diagonalmatrix D so, dass

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = D.$$

c) Folgern Sie aus b), dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$A^n = T \cdot D^n \cdot T^{-1}.$$

d) Zeigen Sie mit c)

$$A^n = 5^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 2^{n+2} + 1 & 2^{n+1} - 2 \\ 2^{n+1} - 2 & 2^n + 4 \end{pmatrix} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

4. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 1994).* Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine symmetrische Matrix, deren fünfte Potenz die Einheitsmatrix E_3 ist. Man zeige: $A = E_3$.
Hinweis:
Da A eine symmetrische Matrix ist, kann A diagonalisiert werden. Zeigen Sie mit Hilfe der Bedingung $A^5 = E_3$, dass für die Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ gilt.